



TITLE:

# マルチプルフェイズプロジェクション法によるトポロジー最適化 (設計変数の低減のための新しい プロジェクション関数の定式化)

AUTHOR(S):

乙守, 正樹; 泉井, 一浩; 西脇, 眞二

---

CITATION:

乙守, 正樹 ...[et al]. マルチプルフェイズプロジェクション法によるトポロジー最適化 (設計変数の低減のための新しいプロジェクション関数の定式化) . TRANSACTIONS OF THE JAPAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS Series C 2011, 77(775): 836-846

ISSUE DATE:

2011-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171652>

RIGHT:

© 2011 一般社団法人 日本機械学会; This is not the published version.  
Please cite only the published version.; この論文は出版社版ではありません。  
引用の際には出版社版をご確認ご利用ください。

# マルチプルフェイズプロジェクション法によるトポロジー最適化\* (設計変数の低減のための新しいプロジェクション関数の定式化)

乙守正樹<sup>\*1</sup>, 泉井一浩<sup>\*1</sup>, 西脇眞二<sup>\*1</sup>

## A Topology Optimization Method based on the Multiple Phase Projection Method (A New Formulation of the Projection Function for Reducing the Number of Design Variables)

Masaki OTOMORI<sup>\*1</sup>, Kazuhiro IZUI and Shinji NISHIWAKI

<sup>\*1</sup> Department of Mechanical Engineering and Science, Graduate School of Engineering, Kyoto University  
Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501, JAPAN

The topology optimization method is the most flexible optimization method that allows both shape and topological changes during the optimization process. However, due to its high flexibility, the utility of topology optimization results is often spoiled by a preponderance of impractical designs that are difficult or impossible to manufacture, such as structures with numerous extremely thin members and tiny holes. This paper proposes a new structural optimization methodology that reduces the number of design variables in a multiple phase projection method, which advantageously reduces computational time and benefits manufacturability. The multiple phase projection method is a geometrical constraint method that imposes a minimum length scale on both solid and void phases. Normally, two design variables are associated with each of these phases at each node in the finite element analysis, resulting in an undesirable increase in the number of design variables. To mitigate this problem, we develop a new methodology that requires only one design variable at each node. An optimum design example for a minimum compliance problem is provided to confirm that the new methodology provides reasonable solutions that achieve the given minimum length scale using a reduced number of design variables.

**Key Words :** Optimal Design, Structural Design, Structural Analysis, Sensitivity Analysis, Finite Element Method

### 1. 緒 言

トポロジー最適化<sup>(1)</sup>は、構造の形状だけでなく穴の数などの形態の変更も可能とする最も自由度が高い構造最適化の方法である。この方法の基本的な考え方は、構造最適化問題を指定した領域内における材料分布問題に置き換えることにある。これにより、形状と形態の変更を可能とするが、微小な穴が無数にある形態や極薄の形状などが最適構造として創生されることも許容することになる。そして、このような構造は、設計変数の緩和後にはグレースケールとして表現される。しかし、グレースケールで構成される構造は、数学的および物理的な解釈は可能であるものの、実際には製造不可能であるため、工学的には意味を持たない構造と言える。また、グレースケールは含まないものの、多くの部分構造と穴で構成される極めて複雑な構造を最適構造として得る場合もあり、このような複雑な最適構造も、一般的には製造が困難である場合が多い。

このような複雑な形状を制御する方法として、現在までに幾つかの方法が提案されている。これらの方法は、大別して、フィルターに基づく方法、幾何制約を与える方法の二つに分類される。

フィルターに基づく方法には、密度の感度にフィルターを課す方法<sup>(2)</sup>や、密度そのものにフィルターを課す方法<sup>(3)</sup>などがある。これらの方法は、その実装は比較的容易であるが、最適化計算の収束性を悪化させるうえ、幾何制

\* 原稿受付 2010 年 7 月 15 日

<sup>\*1</sup> 正員, 京都大学大学院 工学研究科 機械理工学専攻 (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

約を明示的に設定できない欠点をもつ。これに対して、幾何制約を与える方法には、ペリメータに制約を課す方法や、最小寸法制約を最適構造の最小半径として与え、指定した最小寸法より小さな形状が生成されないように制約を課す方法などがある。これらの方法は、制約を陽的に与えるか、陰的に与えるかにより、二つに分類される。

幾何制約を陽的に与える方法には、Perimeter Control 法<sup>(4)</sup>や、Minimum Member Size Control 法<sup>(5)</sup>、Regularized Penalty Function を利用した方法<sup>(6)</sup>、Monotonicity based Minimum Length Scale 法<sup>(7)</sup>などがある。これらの方法は、制約を陽的に表現できるが、パラメータの設定に難しさをもつうえ、最適化計算の収束性を悪化させる欠点をもつ。

幾何制約を陰的に与える方法には、Heaviside Projection Method(以下、HPM と略す)<sup>(8)</sup>や、Morphology-based Filters<sup>(9)</sup>などがある。Morphology-based Filters は、最小寸法である幾何制約を満足するように、最小寸法制約の円内で密度の最大値と最小値をとるフィルタリングを繰り返す。このため、感度解析に多くの計算回数を必要とする欠点をもつ。これに対して、HPM は、設計変数を有限要素モデルの節点の位置に配置し、プロジェクション関数を用いて設計変数空間から要素密度空間へ写像し、ヘビサイド関数を用いて密度を求める。つまり、設計変数の値が 0 より大きい場合、最小寸法制約の円の中に含まれる要素が全て物体領域もしくは空洞領域となることにより、最小寸法よりも小さな構造が創成されないようにする。この方法は、物体領域と空洞領域のどちらか一方に最小寸法制約を与えることができるが、与えていないもう一つの領域には、望ましくない形状が得られる問題点をもつ。

この問題を解決する方法として、HPM に基づいて物体領域と空洞領域の両方に最小寸法制約を与える方法が幾つか提案されている。Inversed Projection 法<sup>(10)</sup>は、各要素の密度に閾値を設けて、二種類のプロジェクション関数を用いるが、閾値の設定に試行錯誤を要する上、与えた最小寸法制約が満足されない場合があることが指摘されている<sup>(11)</sup>。Multiple Phase Projection Method (以下、MPPM と略す)<sup>(11)</sup>は、各節点に物体領域と空洞領域に対応する二つの設計変数を用いて、物体領域と空洞領域に最小寸法制約を与えるが、設計変数の数が二倍になり、従来法より計算時間を必要とする。この問題を解決するため、アダプティブに設計変数の数を減らす方法<sup>(12)</sup>も提案されているが、物体領域に最小寸法制約を与える方法しか示されていない。

そこで本研究では、このような問題を解決する方法として、設計変数の低減化が可能な新しいプロジェクション関数を用いた MPPM を構築する。すなわち、前述のように、従来の方法では、各節点に物体領域と空洞領域に対応する二つの設計変数を設定しているのに対して、本研究では、一つの設計変数を用いて、設計変数の値が正の場合は、物体領域を写像し、負の場合は空洞領域を写像する新しいプロジェクション関数の定式化することにより、設計変数の数を半減可能な新しい方法を提案する。

以下、2 章では、MPPM の概略を説明するとともに、提案する新しいプロジェクション関数の定式化を行う。3 章で、前章の定式化に基づいた最適化の実装方法について説明を行う。最後に、4 章では簡単な最適設計例により、本報で提案する方法の有効性を検証する。

## 2. 定 式 化

### 2.1 HPM

ここでは、まず HPM の基本的な考え方の概略を示す。トポロジー最適化では、構造最適化問題を、指定した設計領域内での材料分布問題に置き換えることにより最適な構造を求める。材料分布問題への置き換えには、通常、有限要素モデルの要素、あるいは節点に正規化された密度関数を配置し、その値が、0 あるいは 1 となるかにより、材料分布状態を表現する。HPM では、従来のトポロジー最適化とは異なり、設計変数は、正規化された密度関数のような物理的な意味を持つ変数でなくてもよく、さらに基本的には有限要素モデルのメッシュとは独立に、設計空間のどこに配置してもよい。本研究では、文献<sup>(8)(10)(11)</sup>と同様に、有限要素モデルの節点の位置に設計変数を配置し、後述するプロジェクション関数を用いた写像後には、要素に正規化された密度関数を配置するものとする。

図 1 に、二次元問題の場合の、幾何制約である最小寸法を設定する領域を示す。図に示したように、まず  $e$  番目の有限要素に対して、指定した最小寸法制約を示す半径  $r_{\min}$  の円内に含まれる設計変数  $\phi_j$  を、次式により特定する。

$$\phi_j \in N^e \text{ if } r \equiv |\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^e| \leq r_{\min} \quad (1)$$

ここで、 $N^e$  は、 $e$  番目の有限要素に関する最小寸法制約の領域を表し、 $\mathbf{x}_j$ 、 $\bar{\mathbf{x}}^e$  はそれぞれ、設計変数  $\phi_j$  と  $e$  番目の要素の中心の座標を表す。

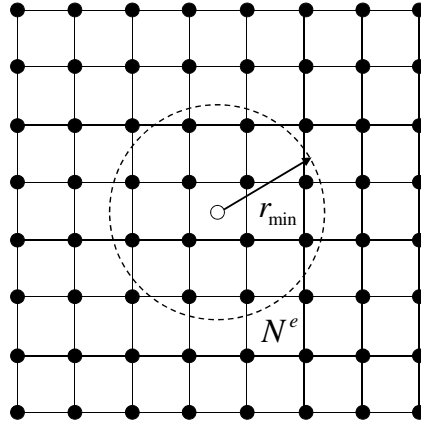


Fig. 1 Domain where minimum length scale is constrained

次に、次式に示すプロジェクション関数を用いて、 $e$  番目の有限要素に関する、距離で重み付けをした設計変数の平均値  $\mu^e$  を求める。

$$\mu^e = \frac{\sum_{j \in N^e} \phi_j w(|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^e|)}{\sum_{j \in N^e} w(|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^e|)} \quad (2)$$

ここで、 $w$  は次式で定義される距離による重み関数で、要素の中心により近い設計変数に大きな重みが与えられる。

$$w(|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^e|) = \begin{cases} \frac{r_{\min} - r}{r_{\min}} & \text{if } \phi_j \in N^e \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

さらに、ヘビサイド関数を用いて、要素における正規化された密度関数の値を求める。それにより、ある設計変数が 0 より大きい値を取る場合、その設計変数を最小寸法制約の円の中を含む全ての要素が物体領域、あるいは空洞領域となり、最小寸法制約より小さい形状が創成されないことになる。なお、このプロジェクション関数は、与えられる最小寸法制約により陰的に決定され、メッシュサイズには依存しない。以下に、物体領域、あるいは空洞領域に最小寸法制約を課す場合について、定式化を示す。

物体領域に最小寸法制約を課す場合には、式 (2) で得られた  $\mu^e$  から、ヘビサイド関数  $H_1(\mu^e)$  を用いて、次式より  $e$  番目の有限要素に関する正規化された密度関数  $\rho_1^e$  の値を求める。

$$\rho_1^e = H_1(\mu^e) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu^e > 0 \\ 0 & \text{if } \mu^e = 0 \end{cases} \quad (4)$$

上式より、領域  $N^e$  において、 $\mu^e$  が 0 よりも大きな値となれば、該当する要素の密度関数の値が 1 となり物体領域を表す。しかし、上式を用いた場合、関数の不連続性より最適化計算に必要な感度を計算できない点をもつため、計算上は次式の平滑化されたヘビサイド関数を用いる。

$$\rho_1^e = H_s(\mu^e) = 1 - e^{-\beta \mu^e} + \mu^e e^{-\beta} \quad (5)$$

ここで、 $\beta$  はヘビサイド関数の曲率を表すパラメータで、図 2 に示したように、 $\beta$  が 0 のときヘビサイド関数は線形となり、 $\beta$  を増加させていくと、平滑化されたヘビサイド関数は、式 (4) で表されるヘビサイド関数に近づき、結果として、グレースケールの領域を小さくする。

他方、空洞領域に最小寸法制約を課す場合には、式 (2) で得られた  $\mu^e$  から、次式より  $e$  番目の有限要素に関する正規化された密度関数  $\rho_0^e$  の値を求める。

$$\rho_0^e = H_0(\mu^e) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mu^e > 0 \\ 1 & \text{if } \mu^e = 0 \end{cases} \quad (6)$$

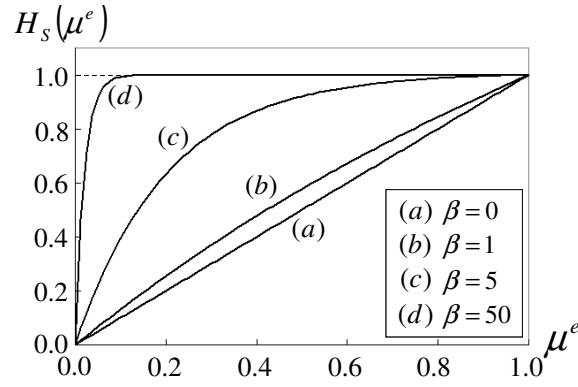


Fig. 2 Smoothed Heaviside function for  $\mu^e$

この場合には、領域  $N^e$  において、 $\mu^e$  が 0 よりも大きな値となれば、該当する要素の密度関数の値が 0 となり空洞領域を表す。なお、この場合も最適化計算には、次式の平滑化されたヘビサイド関数を用いる。

$$\rho_0^e = 1 - H_s(\mu^e) = e^{-\beta\mu^e} - \mu^e e^{-\beta} \quad (7)$$

上に示したように、HPM は、物体領域または空洞領域のどちらか一方に最小寸法制約を課すため、最小寸法制約を課していない領域では、制約を満足しない複雑な形状が創成される問題点をもつ。

## 2.2 MPPM

MPPM では、上述の問題を解決するため、物体領域と空洞領域の両方に最小寸法制約を課す。すなわち、各節点に物体領域と空洞領域に対応する設計変数  $\phi_{1j}$ ,  $\phi_{0j}$  を設定し、HPM と同様に、物体領域と空洞領域の最小寸法制約の領域  $N_1^e$ ,  $N_0^e$  のそれぞれに対して、式 (2) のプロジェクション関数を用いて、距離で重み付けをした設計変数の平均値  $\mu_1^e$ ,  $\mu_0^e$  を求め、さらに、式 (4), (6) のヘビサイド関数により、それぞれの領域の正規化された密度関数  $\rho_1^e$ ,  $\rho_0^e$  を求める。最後に、 $e$  番目の有限要素に関する密度関数  $\rho^e$  の値を、次式のように  $\rho_1^e$  と  $\rho_0^e$  の平均値として求める。

$$\rho^e = \frac{1}{2}(\rho_1^e + \rho_0^e) \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2}(H_1(\mu_1^e) + H_0(\mu_0^e)) \quad (9)$$

なお、この場合も最適化計算では、式 (5), (7) の平滑化されたヘビサイド関数を用いて、次式より求める。

$$\rho^e = \frac{1}{2} \left[ (e^{-\beta\mu_0^e} - \mu_0^e e^{-\beta}) + (1 - e^{-\beta\mu_1^e} + \mu_1^e e^{-\beta}) \right] \quad (10)$$

上式より、 $\rho_1^e = \rho_0^e = 1$  のとき  $\rho^e = 1$  となり物体領域を示す。これに対して、 $\rho_1^e = \rho_0^e = 0$  のとき  $\rho^e = 0$  となり空洞領域を示す。しかし、 $\rho_1^e = 1$ ,  $\rho_0^e = 0$ , または  $\rho_1^e = 0$ ,  $\rho_0^e = 1$  のとき、 $\rho^e = 0.5$  となり、その領域はグレースケールとなるが、次式に示す、SIMP 法<sup>(13)</sup>により、要素剛性行列  $\mathbf{k}^e$  にペナルティを与えることでグレースケールを回避する。

$$\mathbf{k}^e = [(\rho^e)^p + \rho_{\min}] \mathbf{k}_0^e \quad (11)$$

ここで、 $p$  はペナルティパラメータで、 $p > 1$  を用いてグレースケールに制約を与える。 $\mathbf{k}_0^e$  は物体領域の要素剛性行列を表す。 $\rho_{\min}$  は、剛性行列を正定値にするために与えられる十分に小さい値である。

以上の定式化より、MPPM の設計変数の数は HPM の 2 倍となり、最適化計算に HPM より多くの時間を必要とすることを注記しておく。

## 2.3 新しいプロジェクション関数の定式化

前述の MPPM では、どちらか一方の領域がプロジェクション関数により最小寸法制約の領域に写像されるが、写像されない領域に対応する設計変数の値は 0 となり、各節点に配置した二つの設計変数が同時に 0 以上の値を持たない。この点に着目し、本研究では、上述の問題を解決する方法として、各節点に一つの設計変数を設定し、設



計変数が正の場合に物体領域を写像し、負の場合に空洞領域を写像するようにすることで、設計変数の数を減らす方法を提案する。すなわち、設計変数  $\phi_j$  を用いて、物体領域のプロジェクトン関数を次式のように定式化する。

$$\mu_1^e = \frac{\sum_{j \in N_1^e} (|\phi_j| + \phi_j) w(|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^e|)}{2 \sum_{j \in N_1^e} w(|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^e|)} \quad (12)$$

上式より、領域  $N_1^e$  に正の値の  $\phi_j$  があれば、 $\mu_1^e$  は正の値をとり、領域  $N_1^e$  内の全ての  $\phi_j$  の値が 0 以下のときには  $\mu_1^e$  は 0 となる。次に、 $\mu_1^e$  より、式 (4) のヘビサイド関数、数値計算上は近似関数である平滑化されたヘビサイド関数、式 (5) を用いて、 $\rho_1^e$  を求める。つまり、領域  $N_1^e$  に正の値の設計変数があれば、 $\rho_1^e$  が 1 となり物体領域を写像することになる。

他方、空洞領域のプロジェクトン関数を次式のように定式化する。

$$\mu_0^e = \frac{\sum_{j \in N_0^e} (|\phi_j| - \phi_j) w(|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^e|)}{2 \sum_{j \in N_0^e} w(|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^e|)} \quad (13)$$

上式より、領域  $N_0^e$  に負の値の  $\phi_j$  があれば、 $\mu_0^e$  は正の値をとり、領域  $N_0^e$  内のすべての  $\phi_j$  の値が 0 以上のときには  $\mu_0^e$  は 0 となる。次に、 $\mu_0^e$  より、式 (6) のヘビサイド関数、数値計算上は近似関数である平滑化されたヘビサイド関数、式 (7) を用いて  $\rho_0^e$  を求める。つまり、領域  $N_0^e$  に負の値の設計変数があれば、 $\rho_0^e$  が 0 となり空洞領域を写像することになる。最後に、 $e$  番目の有限要素に関する正規化された密度関数  $\rho^e$  は、MPPM と同様に、 $\rho_1^e$  と  $\rho_0^e$  の平均値として求める。

なお、上の定式化では、設計変数  $\phi_j$  の絶対値を用いてプロジェクトン関数の定式化を行っているため、 $\phi_j$  の感度が  $\phi_j = 0$  で不連続となる。ここでは、この問題を回避するため、設計変数の絶対値を、次式で示す関数  $A(\phi)$  で近似する。

$$A(\phi_j) = \sqrt{\phi_j^2 + \varepsilon^2} \quad (14)$$

ここで、 $\varepsilon$  は、関数  $A(\phi)$  を平滑化するためのパラメータである。図 3 に近似関数を示す。さらに、プロジェクトン関数が正規化されるように分母を修正すると、プロジェクトン関数は次式で表される。

$$\mu_1^e = \frac{\sum_{j \in N_1^e} (\sqrt{\phi_j^2 + \varepsilon^2} + \phi_j) w(|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^e|)}{(\sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1) \sum_{j \in N_1^e} w(|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^e|)} \quad (15)$$

$$\mu_0^e = \frac{\sum_{j \in N_0^e} (\sqrt{\phi_j^2 + \varepsilon^2} - \phi_j) w(|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^e|)}{(\sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1) \sum_{j \in N_0^e} w(|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^e|)} \quad (16)$$

## 2.4 平均コンプライアンス最小化問題

ここでは、前述の方法を平均コンプライアンス最小化問題に適用するための定式化を行う。線形弾性体で、物体領域と空洞領域で構成される固定設計領域を  $D$  とし、境界  $\partial D$  に荷重ベクトル  $\mathbf{f}$  が作用したときの変位ベクトルを  $\mathbf{u}$  とする。このとき、体積制約の条件下で平均コンプライアンス  $c$  を最小化する最適化問題は、以下のように定式化される

$$\underset{\phi_j}{\text{minimize}} \quad c = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (17)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{e=1}^N \rho^e v^e \leq V_{\max} \quad (18)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (19)$$

$$-1 \leq \phi_j \leq 1 \quad (20)$$

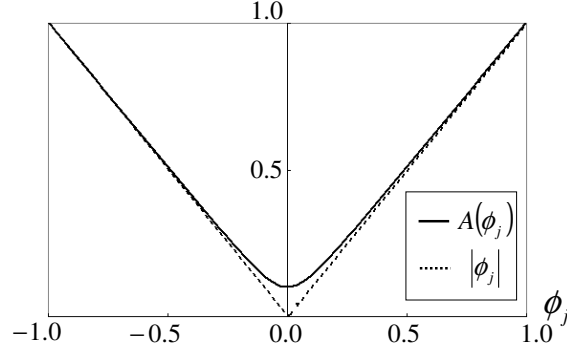


Fig. 3 Approximated absolute value

ここで、 $v^e$  は各有限要素の体積、 $V_{\max}$  は許容される体積の上限値、 $N$  は要素数を表す。また、 $\mathbf{K}$  は、剛性行列を表す。なお、ここでは、前述の MPPM の定式化を離散系で議論しているため、定式化の整合性を保つために、最適化問題も同様に離散系で記述している。

次に、最適化計算に必要な平均コンプライアンスの感度を求めると次式となる。

$$\frac{\partial c}{\partial \phi_j} = \sum_{e \in D} \frac{\partial c}{\partial \rho^e} \frac{\partial \rho^e}{\partial \phi_j} \quad (21)$$

上式において、 $e$  番目の有限要素の密度  $\rho^e$  に対する平均コンプライアンスの感度  $\frac{\partial c}{\partial \rho^e}$  は、最適化問題が自己随伴形式であるため、次式で求められる。

$$\frac{\partial c}{\partial \rho^e} = -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho^e} \mathbf{u} = -p(\rho^e)^{p-1} \mathbf{u}^T \mathbf{k}_0^e \mathbf{u}^e \quad (22)$$

ここで、 $\mathbf{u}^e$  は  $e$  番目の有限要素の変位ベクトルを表す。式 (22) を式 (21) に代入すれば、平均コンプライアンスの感度は、結局、次式となる。

$$\frac{\partial c}{\partial \phi_j} = - \sum_{e \in D} p(\rho^e)^{p-1} \mathbf{u}^T \mathbf{k}_0^e \mathbf{u}^e \frac{\partial \rho^e}{\partial \phi_j} \quad (23)$$

ここで、上式中の  $\frac{\partial \rho^e}{\partial \phi_j}$  は、式 (24)-(26) より求められる。

$$\frac{\partial \rho^e}{\partial \phi_j} = \sum_{i=1,0} \frac{\partial \rho^e}{\partial \mu_i^e} \frac{\partial \mu_i^e}{\partial \phi_j} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \rho^e}{\partial \mu_i^e} = \frac{1}{2} (-1)^{i+1} \left( \beta e^{-\beta \mu_i^e} + e^{-\beta} \right) \quad (25)$$

$$\frac{\partial \mu_i^e}{\partial \phi_j} = \left[ \frac{\phi_j}{\sqrt{\phi_j^2 + \varepsilon^2}} + (-1)^{i+1} \right] \frac{w(|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^e|)}{\left( \sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1 \right) \sum_{k \in N_i^e} w(|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}^e|)} \quad (26)$$

### 3. 最適化手法の実装

#### 3.1 最適化アルゴリズム

図 4 に、最適化のフローチャートを示す。図に示したように、初めに設計変数の初期値を与え、次にプロジェクション関数を用いて、 $\mu_1^e$ 、 $\mu_0^e$  を計算し、ヘビサイド関数を用いて、要素の密度  $\rho^e$  を計算する。次に、有限要素法を用いて、目的関数または設計変数が収束した場合、最適解が得られたと判断し、最適化計算を終了する。収束しなかった場合、目的関数の感度を計算し、設計変数を更新し、最初のステップに戻る。なお、本研究では、最適化手法には MMA<sup>(14)</sup> を用い、これにより設計変数の更新を行う。

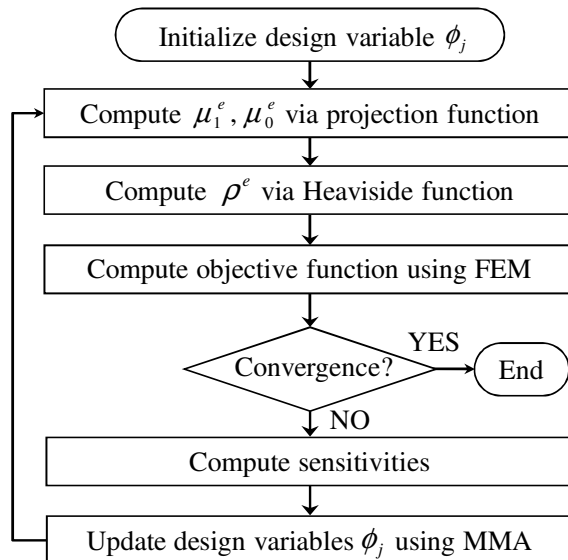


Fig. 4 Flowchart of optimization procedure

### 3.2 最適化パラメータの更新方法

MPPM では, SIMP 法を用いた場合, ペナルティパラメータ  $p$  の値を大きくすれば, グレースケールを除去できるものの, 最適化計算において, 収束性を悪化させることが知られている. そこで本研究では, 文献<sup>(8)(11)(12)</sup>と同様に, ペナルティパラメータ  $p$  と, ヘビサイド関数のパラメータ  $\beta$  を 1.0 から段階的に増やして, 最適化計算を行う. パラメータ更新のフローチャートを図 5 に示す. ここで,  $\Delta p = 0.5$ ,  $\Delta \beta = 1.1^k$  とした.  $k$  は繰り返し回数である. また,  $p_{\max} = 5.0$ ,  $\beta_{\max} = 50.0$  とした.

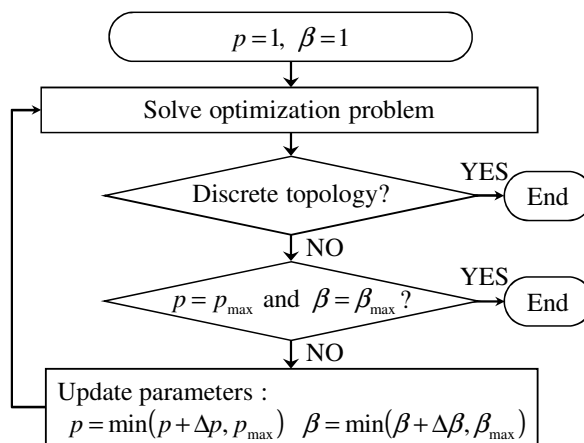


Fig. 5 Flowchart of updating parameters

## 4. 数 値 例

本研究で提案する方法を, 簡単な平均コンプライアンス最小化問題に適用し, 有効性を検討する. 図 6 に設計領域を示す. 図に示したように, 設計領域の左右下端を拘束し, 中央上部に荷重を負荷し, 平均コンプライアンスを最小化した場合の最適構造を求める. なお, 設計問題の対称性より, 右側半分の領域で最適化計算を行う. 最適化に用いた物体領域のヤング率は 1.0, ポアソン比は 0.25, 許容される体積の上限値  $V_{\max}$  は固定設計領域の 50%,  $\rho_{\min}$  は  $1.0 \times 10^{-4}$  とした. なお, 本数値例では, 文献<sup>(8)(11)(12)</sup>の最適化結果との比較を容易にするため, 文献<sup>(8)(11)(12)</sup>と同様, 無次元化したヤング率, 寸法を用いている.



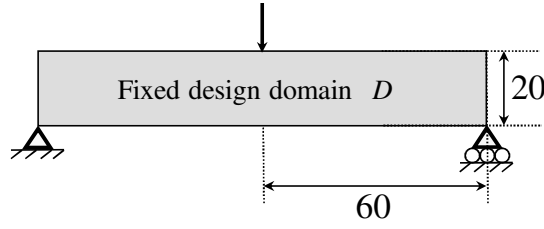


Fig. 6 Design domain of simple design problem

#### 4.1 提案手法により求めた最適構造の検討

図 7 に、提案手法により求めた最適構造を示す。図に示すように、最適構造の境界付近にグレースケールを含む構造となっている。図中、右上に示す線は、上側の線が物体領域、下側の線が空洞領域に与えた最小寸法制約の大きさを示す。

なお、2 章の定式化では、最小寸法制約を最適構造の最小半径  $r_{\min}$  として定式化しているが、図中には、直径  $d_{\min}(=2r_{\min})$  を示している。ここでは、 $d_{\min} = 2.0$  として最適構造を求めた。

また、図 8 に、最適化後の設計変数の分布を示す。図中 A の領域のように、境界付近では、最小寸法制約の円の中に、正の値を持つ設計変数と負の値を持つ設計変数が混在するため、物体領域と空洞領域の両方が写像される。そのため、最適構造の境界付近に、与えられた寸法制約と同じ幅のグレースケールが生じている。よって、グレースケールの幅の中間で、物体領域と空洞領域に分割することで、望ましい最適構造が得られると考えられる。ここでは、以下に示す手順でグレースケールを除去した。まず、式 (27) に示すように、 $0.25 < \rho^e < 0.75$  の要素に対して、要素の中心から最小寸法の半径の円に含まれる要素の密度の平均値  $\hat{\rho}^e$  を求める。

$$\hat{\rho}^e = \begin{cases} \frac{\sum_{j=N_e} \rho^j}{\sum_{j=N_e} 1} & \text{if } 0.25 < \rho^e < 0.75 \\ \rho^e & \text{if otherwise} \end{cases} \quad (27)$$

その後、 $\hat{\rho}^e$  を用いて、体積制約を満たすような適当な閾値  $\rho_{thres}^e$  で、グレースケールを除去した。なお、閾値  $\rho_{thres}^e$  は、初期値を 0.5、初期区間を  $[0 \ 1]$  とし、二分探索法を用いて求めた。

$$\bar{\rho}^e = \begin{cases} 1 & \text{if } \hat{\rho}^e \geq \rho_{thres}^e \\ 0 & \text{if } \hat{\rho}^e < \rho_{thres}^e \end{cases} \quad (28)$$



Fig. 7 Configuration using the proposed MPPM before removing grayscales



Fig. 8 Distribution of the design variable  $\phi$  using the proposed MPPM

#### 4.2 HPM と MPPM による最適構造の比較

ここでは、従来の HPM, MPPM と提案する方法の比較を行う。最小寸法制約を  $d_{\min} = 2.0$  として最適構造を求めた。図 9 に最適構造を示す。図 9(a) は、HPM で物体領域のみに制約を与えた場合の最適構造、図 9(b) は、HPM で空洞領域のみに制約を与えた場合の最適構造、図 9(c) は、MPPM で求めた最適構造、図 9(d) は、提案手法で求めた最適構造を示す。この場合、グレースケールの除去に用いる閾値  $\rho_{thres}^e$  は 0.533 となった。図中、右上に最小寸法制約の大きさを示し、NA は最小寸法制約を与えなかったことを意味する。また、いずれの場合も最適解では、3.2 節で述べた最適化パラメータの値が、 $p = 5.0$ ,  $\beta = 50.0$  となった。図 9(a) と (b) においては、最小寸法を満足しない微小な孔や薄い形状などが見られる。これに対して、図 9(c) と (d) では、そのような形状が見られないことが確認できる。

次に、各手法において、同一の環境で計算を行い、初めの 100 回の最適化ループの平均の値を求めた結果を比較する。図中に、1 回の最適化ループで感度解析に要した時間を、Sensitivity computation time として示す。なお、ここでの計算は、Intel Core2 Quad CPU, メモリ 4.0GB のコンピュータを用い、プログラムは MATLAB version 7.5 を用いて実装した。感度解析以外の部分で 1 回の最適化ループに要した時間は、各手法においてほぼ同じであったため、ここでは省略する。提案する手法では、従来の MPPM に比べ、感度解析に要する時間を大幅に削減できていることが確認できる。また、図中に、得られた最適解の平均コンプライアンスの値を、Obj として示す。提案手法を用いた場合の平均コンプライアンスの値を MPPM の場合と比較すると、約 3.2% 大きいもののほぼ同等の値が得られている。したがって、提案する手法を用いて短い計算時間で効率的に最適構造を求められることがわかった。

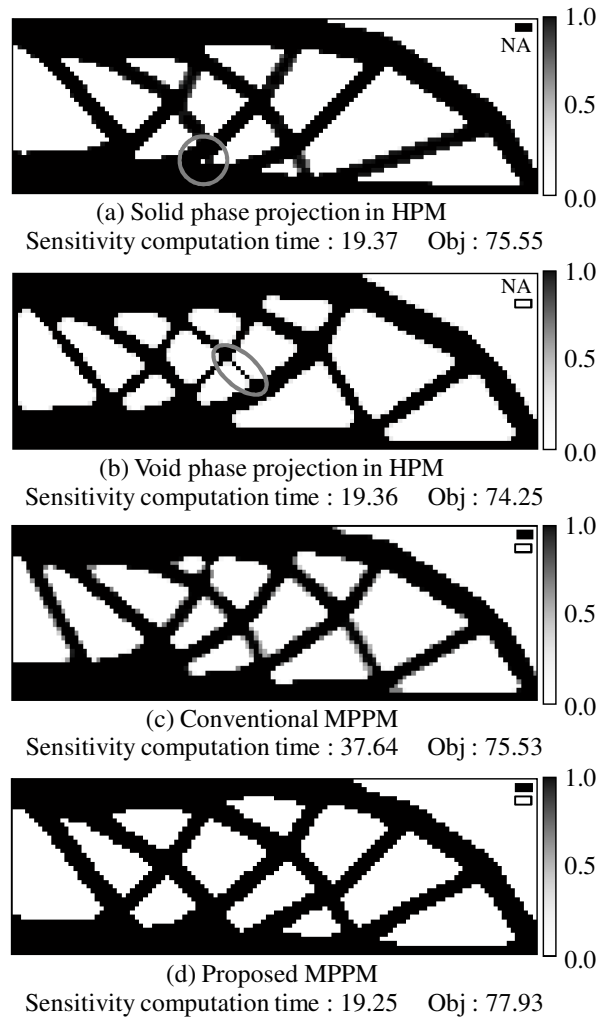


Fig. 9 Optimal configuration obtained under various conditions.

### 4.3 最小寸法制約の大きさによる最適構造の比較

次に、最小寸法制約の大きさによる最適構造を比較した。図 10 に、提案手法で最小寸法制約を  $d_{\min} = 1.0, 2.0, 3.0$  とした場合の最適解を示す。このとき、グレースケールの除去に用いる閾値はそれぞれ  $\rho_{thres}^e = 0.500, 0.533, 0.527$  となった。また、いずれの場合も最適解では、最適化パラメータの値が、 $p = 5.0$ ,  $\beta = 50.0$  となった。さらに、いずれの場合も与えられた最小寸法制約を満たす解が得られていることが確認できる。

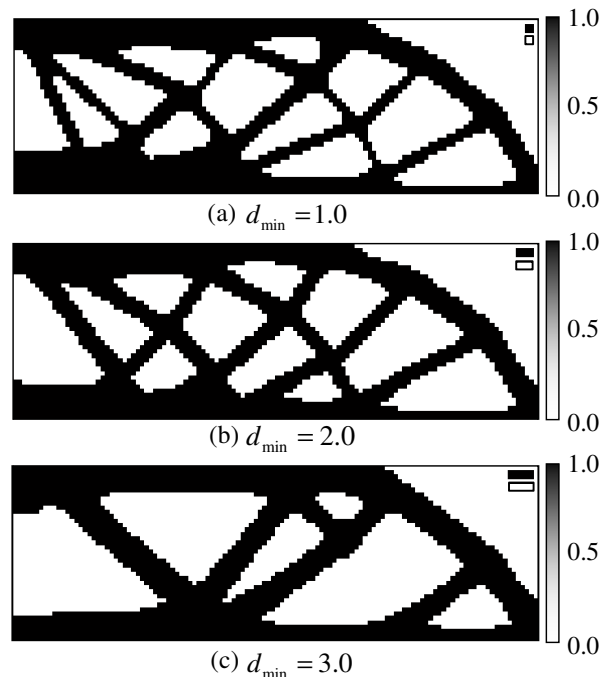


Fig. 10 Optimal configurations using the proposed MPPM for various magnitudes of  $d_{\min}$

## 5. 結 言

本研究では、計算時間に有利な新しい MPPM を提案した。本研究で得られた結果を以下に示す。

- (1) 有限要素モデルの各節点に設計変数の一つだけ設定する新しいプロジェクション関数の定式化を行い、従来の MPPM よりも設計変数の数を半減させる、計算時間に有利な方法を提案した。
- (2) 平均コンプライアンス最小化問題に適用し、本研究で提案する方法の有効性を検証した。その結果より、従来の MPPM と比べ、感度解析に要する時間を大幅に削減できることが確認できた。また、得られた最適構造の境界付近にグレースケールが含まれるものの、グレースケールは除去することができ、妥当な最適構造が得られることを示した。さらに、本研究で提案する方法において、最適構造の最小寸法の設定が可能であることを示した。

## 謝 辞

本論文の第一筆者は、アイシン・エイ・ダブリュ株式会社の支援のもとに研究を実施した。本支援に深く謝意を表す。

## 文 献

- (1) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **71**, No. 2 (1988), pp. 197-224.
- (2) Sigmund, O., On the Design of Compliant Mechanisms Using Topology Optimization, *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. **25**, No. 4 (1997), pp. 493-524.

- (3) Bruns, T. E. and Tortorelli, D. A., Topology Optimization of Non-Linear Elastic Structures and Compliant Mechanisms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **190**, No. 26-27 (2001), pp. 3443-3459.
- (4) Haber, R. B., Jog, C. S. and Bendsøe, M. P., A New Approach to Variable-Topology Shape Design Using a Constraint on Perimeter, *Structural Optimization*, Vol. **11**, No. 1(1996), pp. 1-12.
- (5) Zhou, M., Shyy, Y. K. and Thomas, H. L., Checkerboard and Minimum Member Size Control in Topology Optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. **21**, No. 2(2001), pp. 152-158.
- (6) Borrvall, T. and Petersson, J., Topology Optimization Using Regularized Intermediate Density Control, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **190**, No. 37-38(2001), pp. 4911-4928.
- (7) Poulsen, T. A., A New Scheme for Imposing a Minimum Length Scale in Topology Optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **57**, No. 6(2003), pp. 741-760.
- (8) Guest, J. K., Prévost, J. H., and Belytschko, T., Achieving Minimum Length Scale in Topology Optimization Using Nodal Design Variables and Projection Functions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **61**, No. 2(2004), pp. 238-254.
- (9) Sigmund, O., Morphology-Based Black and White Filters for Topology Optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. **33**, No. 4-5(2007), pp. 401-424.
- (10) Almeida, S. R. M., Paulino, G. H. and Silva, E. C. N., A Simple and Effective Inverse Projection Scheme for Void Distribution Control in Topology Optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. **39**, No. 4(2009), pp. 359-371.
- (11) Guest, J. K., Topology Optimization with Multiple Phase Projection, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **199**, No. 1-4(2009), pp. 123-135.
- (12) Guest, J. K. and Smith Genut, L. C., Reducing Dimensionality in Topology Optimization Using Adaptive Design Variable Fields, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **81**, No. 8(2010), pp. 1019-1045.
- (13) Bendsøe, M. P., Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem, *Structural Optimization*, Vol. **1**, No. 4(1989), pp. 193-202.
- (14) Svanberg, K., The Method of Moving Asymptotes - A New Method for Structural Optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **24**, No. 2 (1987), pp. 359-373.